Concours commun INA-ENSA

**MATHÉMATIQUES**

PREMIÈRE COMPOSITION
(Option agronomie - Option biochimie-biologie)

Durée : 3 heures

Ce problème a pour objet une étude de la constante d'Euler, $\gamma$; on en obtient une définition et un encadrement grossier dans la partie I. L'encadrement est amélioré dans la partie II et la partie III met en oeuvre une autre méthode d'approximation de $\gamma$.

## PARTIE I

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $u_n\in\mathbb{R}$ par:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ell n(n)$$

où $\ell n$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer, lorsque n tend vers $+\infty$, un équivalent de $u_{n+1} - u_n$, de la forme $\frac{C}{n^\alpha}$ où C est une constante.

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge. On posera

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} u_n .$$

**3.a.** Prouver, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, les inégalités:

$$\frac{1}{k+1} \leq \ell n \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k} .$$

**3.b.** Etudier, sur l'intervalle [k, k+1] ($k\in\mathbb{N}^*$), le signe de la fonction $\ell_k$ définie par:

$$\ell_k(x) = \frac{1}{k} + \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right)(x-k) - \frac{1}{x} .$$

En déduire l'encadrement:

$$\frac{1}{k+1} \leq \ell n \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{2}\left[ \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right].$$

4. Prouver que $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$.

## PARTIE II

1. On définit les fonctions $q_1$ et $q_2$ sur $]0, +\infty[$ par:

$$q_1(x) = -\frac{1}{x+1} + \ell n\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x^2} ;$$

$$q_2(x) = q_1(x) + \frac{2}{3x^3} .$$

Etudier les variations de $q_1$ et $q_2$ sur $]0, +\infty[$ et en déduire leur signe.

2. Déduire des résultats de la question précédente que l'on a, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} \leq u_n - u_{n+1} \leq \frac{1}{2n^2} .$$

3. Soit $n \geq 2$.

3.a. Donner un encadrement, fonction très simple de n, pour $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, et un majorant de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3}$.

(On pourra utiliser la comparaison avec une intégrale.)

3.b. En déduire, pour tout $n \geq 2$, les inégalités:

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{3(n-1)^2} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

4. Donner une valeur de l'entier n telle que l'encadrement précédent permette, à partir de $u_n$, de déterminer $\gamma$ à moins de $10^{-2}$ près. Puis, encadrer effectivement, selon ce procédé, $\gamma$ à $10^{-2}$ près.

## PARTIE III

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

En déduire la valeur de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

2. Trouver trois constantes réelles $a$, $b$ et $c$ telles que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ , puis en déduire,

d'une part $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$ ,

et d'autre part la valeur de $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .

3. Déterminer des constantes réelles $\lambda$ et $\mu$, de sorte que le développement de

$$w_n = u_n - u_{n+1} - \frac{\lambda}{n(n+1)} - \frac{\mu}{n(n+1)(n+2)}$$

selon les puissances de $\frac{1}{n}$ , lorsque n tend vers $+\infty$, ait son premier terme non nul d'ordre aussi élevé que possible, et donner alors la valeur $\frac{D}{n^{\beta}}$ de ce premier terme.

4. Montrer que, pour tout entier n strictement supérieur à 1,

$$\frac{D}{\beta-1}\left[\frac{1}{n^{\beta-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\beta-1}}\right] \leq \frac{D}{n^{\beta}} \leq \frac{D}{\beta-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{\beta-1}} - \frac{1}{n^{\beta-1}}\right]$$

et en déduire

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{D}{n^{\beta}} \sim \frac{D}{(\beta-1)\, n^{\beta-1}} \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

5. On *admet* que, puisque $w_n \sim \frac{D}{n^{\beta}}$ $(n \to +\infty)$ , on a aussi, $\sum_{k=n}^{\infty} w_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{D}{n^{\beta}}$ $(n \to +\infty)$.

En déduire un terme correctif $v_n$ , tel que $u_n + v_n - \gamma \sim -\frac{1}{12n^3}$ $(n \to +\infty)$.

Reprendre la valeur calculée en II 5. pour $u_n$ et lui ajouter le terme correctif $v_n$.

On a prouvé que le début du développement décimal illimité de $\gamma$ était en fait: 0,577215...

Qu'observez-vous?